mit der gedeckten der anderen im Sehfelde zusammenfällt; dann erblickt man das Loch in dem Boden der zweiten Röhre umgeben von einem dunkeln Hofe, welche allmälich in das helle Feld übergeht, das von der Wand der Röhre begrenzt wird.

Prof. Brücke macht darauf aufmerksam, dass dieser schöne Versuch wiederum in schlagender Weise zeige, wie vergeblich es sei, die Contrast-Erscheinungen einseitig von den durch einfallendes Licht bedingten Erregungszuständen der Netzhaut ableiten zu wollen, und dass man immer zugleich die Erregungszustände der Centraltheile, des Gehirnes selbst, berücksichtigen müsse, wie er solches schon in seiner Abhandlung über die subjectiven Complementär-Farben (Denkschriften Band III, Seite 95) nachgewiesen habe. Wenn man sich nicht mit den nichtssagenden Phrasen von Sympathien beider Netzhäute begnügen, sondern den innern Hergang bei diesem Versuche wirklich vorstellbar machen wolle, so müsse man sagen: Durch die örtliche Bestrahlung der Netzhaut des Auges, welches durch die gedeckte Röhre sieht, wird der Bezirk des Centralorgans, zu welcher die durch jene Bestrahlung bedingte Erregung zunächst fortgeleitet wird, sammt seiner nächsten Umgebung so verändert, dass er weniger disponirt ist, zur Erfindung des Leuchtenden erregt zu werden als die davon entfernter liegenden Punkte, desshalb empfinden auch diese die Erregung, welche von dem anderen Auge her zugeleitet wird, stärker, und dadurch entsteht im binoculären Sehen der dunkle Hof auf hellem Felde.

Hr. Simon Spitzer, Assistent und Privat-Docent am k. k. polytechnischen Institute in Wien, überreichte nachstehende Abhandlung: „Zusätze zu meinen Arbeiten über höhere Gleichungen."

Ich habe in einem kleinen Aufsatze, der im Bd. VI, Hft. 2, S. 152, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften erschien, eine Vervollständigung meiner Arbeiten über höhere Gleichungen, die ich unter dem Titel „Allgemeine Auflösung der Zahlen-Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten" veröffentlichte, geliefert, und lasse hier mehrere andere nachfolgen.

1.

Es kann der Fall vorkommen, dass man bei einer Gleichung höheren Grades die Kenntniss der trinomischen, aber reellen Wurzelfactoren der Kenntniss der imaginären Wurzeln derselben vorzieht. Ich will daher hier zeigen, wie man einen solchen Factor sich verschafft, ohne erst die imaginären Wurzeln selbst zu kennen. Sei

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

das Gleichungspolynom, in welchem alle Coëfficienten bekannte reelle Zahlen sind, $x^2 + ax + b$ ein Wurzelfactor, der von zwei conjugirten imaginären Wurzeln herrührt. Man dividire das Polynom $f(x)$ durch $x^2 + ax + b$, so wird ein gewisser Quotient erscheinen, und ein Rest von der Form $Mx + N$, wo M und N Functionen sind von den noch unbekannten Zahlen a und b. Soll nun $x^2 + ax + b$ ein Factor des Polynoms $f(x)$ sein, so muss als Rest Null herauskommen für jedes x, also muss man haben:

$$M = 0 \quad , \quad N = 0.$$

Jene reellen Werthsysteme von a und der positiven Zahl b, welche diesen beiden Gleichungen genügen, sind die Theile, welche zur Bildung des Wurzelfactors $x^2 + ax + b$ der vorgelegten Gleichung gehören.

Um das Bildungsgesetz der beiden Gleichungen

$$M = 0 \quad , \quad N = 0$$

zu kennen, dienen folgende Betrachtungen: Es sei

$$f(x) = (x^2 + ax + b)\,\varphi(x) + Mx + N,$$

wo offenbar $\varphi(x)$ der Quotient ist, der erhalten wird, wenn man $f(x)$ durch $x^2 + ax + b$ dividirt. Seien α und β die beiden imaginären Wurzeln von $x^2 + ax + b = 0$, so ist

$$f(\alpha) = M\alpha + N$$
$$f(\beta) = M\beta + N,$$

somit

$$M = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \quad , \quad N = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}.$$

Setzt man nun statt α, $m+n$; statt β, $m-n$; entwickelt dann $f(m+n)$ und $f(m-n)$ nach der Taylor'schen Reihe und reducirt gehörig, so erhält man

$$M = f'(m) + \frac{n^2}{3!} f^{(3)}(m) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(m) + \ldots$$

$$N = f(m) + \frac{n^2}{2!} f^{(2)}(m) + \frac{n^4}{4!} f^{(4)}(m) + \ldots -$$
$$- m \left[f'(m) + \frac{n^2}{3!} f^{(3)}(m) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(m) + \ldots \right],$$

oder da

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0$$

ist.

$$(1) \quad \begin{aligned} & f'(m) + \frac{n^2}{3!} f^{(3)}(m) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(m) + \ldots = 0 \\ & f(m) + \frac{n^2}{2!} f^{(2)}(m) + \frac{n^4}{4!} f^{(4)}(m) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\alpha = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} \quad , \quad \beta = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}},$$

somit

$$m = -\frac{a}{2} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}},$$

und folglich sind die beiden Gleichungen, die zur Bestimmung von a und b dienen, diejenigen, die man erhält, wenn man in den Gleichungen (1) die Substitutionen $m = -\frac{a}{2}$, $n^2 = \frac{a^2 - 4b}{4}$ vollzieht.

Das Bildungsgesetz der Gleichungen (1) ist sehr leicht zu merken, da die abwechselnden Glieder der Entwicklung von $f(m+n)$ nach Taylor's Reihe mit denselben im innigsten Zusammenhange stehen. Was übrigens die Auflösung dieser zwei Gleichungen anbelangt, d. i. die Aufsuchung von a und b, so ist, wie man sich sehr bald überzeugt, dieselbe nicht im Geringsten complicirter, als die Aufsuchung der imaginären Wurzel der vorgelegten Gleichung.

2.

Ich zeigte in meiner zu Anfang citirten Arbeit, wie sich in gewissen Fällen eine Function mit zweien Unbekannten in mehrere rationale Factoren, die sich unter einander bloss um constante Zahlen unterscheiden, zerfällen lässt. — Ganz analoge Zerfällungen gestatten unter gewissen Umständen auch Functionen mit drei oder mehreren Unbekannten. Wäre nämlich gegeben

$$\varphi\,(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) = 0 \qquad (1)$$

so bilde man hieraus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\partial u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\partial u_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\partial u_3 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\partial u_n = 0 \qquad (2)$$

Haben nun die verschiedenen Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$ einen gemeinschaftlichen Factor, wird die Gleichung (2) durch diesen dividirt, und gäbe diess die Gleichung

$$U_1\,\partial u_1 + U_2\,\partial u_2 + U_3\,\partial u_3 + \ldots + U_n\,\partial u_n = 0 \qquad (3)$$

wo $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$, constante Zahlen oder auch Functionen von $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ sind, so wird, wenn diese Gleichung (3) ein vollständiges Differential, etwa von

$$f\,(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) = \text{Const.} \qquad (4)$$

ist, $\varphi\,(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$ eine Function sein von $f\,(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$, die man, wenn (1) und (4) algebraische Polynome sind, sehr leicht dadurch bestimmen kann, dass man das Polynom (1) nach den Potenzen des Polynoms (4) ordnet.

Um diess zu beweisen, bemerke man, dass sich die Gleichung (3) in der Form

$$\partial f = 0$$

schreiben lässt, und folglich die Gleichung (2) in der Form

$$M\,\partial f = 0,$$

wenn M der Factor ist, durch den sie abgekürzt wurde. Da nun Mdf ein vollständiges Differential und zwar von φ ist, so kann diess nur dann stattfinden, wenn M eine Function von f ist, sei diese $\psi(f)$ so ist

$$\partial\varphi = \psi(f)\,\partial f$$

und wenn man integrirt

$$\varphi = \int \psi(f)\,\partial f = \text{einer Function von } f.$$

Beispiel. Es sei ein Polynom mit den 3 Unbekannten x, y, z gegeben, dieses sei

$$\varphi(x, y, z) = z^6 + 3z^4(-xy + x - 2) + z^2[3x^2y^2 + 6xy(-x+2) + 3x^2 - 12x + 11] - x^3y^3 + 3x^2y^2(x-2) + xy(-3x^2 + 12x - 11) + x^3 - 6x^2 + 11x + 6,$$

so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3z^4(-y+1) + 6z^2[xy^2 + 2y(-x+1) + x - 2] - 3x^2y^3 + + 3xy^2(3x-4) + y(-9x^2 + 24x - 11) + 3x^2 - 12x + 11,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -3xz^4 + 6xz^2(xy - x + 2) - 3x^3y^2 + 6x^2y(x-2) - 3x_3 + 12x^2 - 11x,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 6z^5 + 12z^3(-xy + x - 2) + 2z[3x^2y^2 + 6xy(-x+2) + + 3x^2 - 12x + 11].$$

Diese drei Differenzialquotienten lassen sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (-y+1)[3z^4 + 6z^2(-xy + x - 2) + 3x^2y^2 + 6xy(-x+2) + 3x^2 - 12x + 11],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x[3z^4 + 6z^2(-xy + x - 2) + 3x^2y^2 + 6xy(-x+2) + 3x^2 - 12x + 11],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z[3z^4 + 6z^2(-xy + x - 2) + 3x^2y^2 + 6xy(-x+2) + 3x^2 - 12x + 11].$$

und die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial z = 0 \qquad (2)$$

geht, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors über in

$$(-y+1)\partial x - x\partial y + 2z\partial z = 0 \qquad (3)$$

welche das vollständige Differential von

$$x - xy + z^2 = \text{Const.} \qquad (4)$$

ist. Es muss somit $\varphi(x, y, z)$ eine Function sein von $x - xy + z^2$. Um nun diese Function zu finden, dividiren wir $\varphi(x. y, z)$ durch

z^2-xy+x, den dabei herauskommenden Quotienten wieder, eben so den hiebei herauskommenden Quotienten u. s. f., so hat man

$$\frac{\varphi(x,y,z)}{z^2-xy+x}=Q_1+\frac{6}{z^2-xy+x},$$

wo

$$Q_1=z^4+2z^2(-xy+x-3)+x^2y^2+2xy(-x+3)+x^2-6x+11$$

ist, ferner hat man

$$\frac{Q_1}{z^2-xy+x}=Q_2+\frac{11}{z^2-xy+x},$$

wo

$$Q_2=z^2-xy+x-6$$

ist, endlich hat man

$$\frac{Q_2}{z^2-xy+x}=1-\frac{6}{z^2-xy+x}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}Q_2&=(z^2-xy+x)-6\\ Q_1&=(z^2-xy+x)^2-6(z^2-xy+x)+11\\ \varphi(x,y,z)&=(z^2-xy+x)^3-6(z^2-xy+x)^2+11(z^2-xy+x)-6.\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\varphi(x,y,z)=0$$

geht daher, wenn man $z^2-xy+x=u$ setzt, über in

$$u^3-6u^2+11u-6=0$$

und dieser genügen die Auflösungen 1, 2, 3, folglich ist

$$\begin{aligned}z^2-xy+x&=1\\ z^2-xy+x&=2\\ z^2-xy+x&=3\end{aligned}$$

und somit zerfällt die vorgelegte Gleichung in diese drei einfacheren Gleichungen.

3.

Es gibt Fälle, wo Analoges sogar bei Gleichungen mit einer Unbekannten stattfindet. Ist nämlich

$$f(x) = \varphi(u) \quad \text{und} \quad u = \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ eine Function von höherem als ersten Grade ist, so wird in einem solchen Falle die Auflösung der Gleichung

$$f(x) = 0$$

zurückgeführt auf die Auflösung von

$$\varphi(u) = 0$$

und auf die Auflösung der Gleichungen

$$\psi(x) = \alpha \quad , \quad \psi(x) = \beta \quad , \quad \psi(x) = \gamma,$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ sind. Hat man daher eine Gleichung höheren Grades gegeben, von der man vermuthet, dass sie eine solche Zerfällung gestattet, sei nämlich

$$f(x) = \varphi(u),$$

so ist offenbar

$$f'(x) = \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Man wird daher die vorgelegte Gleichung differenziren, den Differentialquotienten in Factoren auflösen, seien dieselben

$$x - w_1 \quad , \quad x - w_2 \quad ; \quad x - w_3 \quad , \quad \ldots x - w_{n-1}$$

so wird man setzen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x - w_1,$$

d. h.

$$u = \frac{x^2}{2} - w_1 x = \frac{1}{2}(x^2 - 2w_1 x),$$

und wird sehen, ob sich $f(x)$ so nach den Potenzen von $x^2 - 2w_1 x$ ordnen lässt, dass die Coëfficienten dieses nach $x^2 - 2w_1 x$ geordneten Polynoms constante Zahlen sind. Ist dieses der Fall, so

ist $f(x) = \varphi(x^2 - 2w_1 x)$; (es muss hierbei, wie sich von selbst versteht, der Grad von $f(x)$ eine durch zwei theilbare Zahl sein), ist dieses nicht der Fall, so wird man genau denselben Versuch mit dem Polynom $x^2 - 2w_2 x$ oder mit $x^2 - 2w_3 x$, . . . machen.

Gelingt es nicht, das Polynom nach einer der Grössen

$$x^2 - 2w_1 x \quad , \quad x^2 - 2w_2 x \quad , \quad x^2 - 2w_3 x \quad , \quad \ldots x^2 - 2w_{n-1} x$$

zu ordnen, so wird man, falls der Grad des Polynoms $f(x)$ ein Vielfaches von 3 ist, die $n-1$ Factoren von $f'(x)$ zu je zwei combiniren und versuchen, ob

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x - w_1)(x - w_2),$$

d. h. ob

$$u = \frac{x^3}{3} - \frac{w_1 + w_2}{2} x^2 + w_1 w_2 x = \frac{1}{3}\left[x^3 - \frac{3}{2}(w_1 + w_2) x^2 + 3 w_1 w_2 x\right]$$

sein kann. Man wird nämlich sehen, ob $f(x)$ sich nach den Potenzen von

$$x^3 - \frac{3}{2}(w_1 + w_2) x^2 + 3 w_1 w_2 x,$$

so ordnen lässt, dass die Coëfficienten des so geordneten Polynoms constant sind. Ist dieses nicht der Fall, so wird man einen ähnlichen Versuch mit

$$x^3 - \frac{3}{2}(w_1 + w_3) x^2 + 3 w_1 w_3 x,$$

oder mit

$$x^3 - \frac{3}{2}(w_2 + w_3) x^2 + 3 w_2 w_3 x$$

u. s. f. machen.

So z. B. findet man, dass sich das Polynom

$$x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 13x^2 + 14x + 9$$

in der Form

$$(x^2 - 2x)^3 + 5(x^2 - 2x)^2 - 7(x^2 - 2x) + 9$$

bringen lässt.

4.

Ich glaube bei der Aufzählung der speciellen Fälle noch den Fall anführen zu dürfen, wo die Gleichungen nach den in ihnen vorkommenden Unbekannten symmetrisch sind, obwohl dieser so einfach ist, dass er kaum einer Erwähnung bedürfte. — Wäre ein solches System

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) &= 0 \\ \varphi_2(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) &= 0 \\ \varphi_3(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) &= 0, \end{aligned}$$

so lässt sich dasselbe in zwei andere, einfachere umgestalten. Setzt man nämlich

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n &= v_1 \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + \ldots + u_{n-1} u_n &= v_2 \\ u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_{n-2} u_{n-1} u_n &= v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u_{n-1} u_n &= v_n, \end{aligned}$$

so ist dies das eine System. Da die Gleichungen (1) nach der Voraussetzung symmetrisch sind, so lassen sich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ durch $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ ausdrücken, und gesetzt den Fall, dadurch gingen die Gleichungen (1) über in

$$(3) \qquad \begin{aligned} \psi_1(v_1, v_2, v_3, \ldots v_n) &= 0 \\ \psi_2(v_1, v_2, v_3, \ldots v_n) &= 0 \\ \psi_3(v_1, v_2, v_3, \ldots v_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(v_1, v_2, v_3, \ldots v_n) &= 0, \end{aligned}$$

so ist natürlich dieses System von einfacherem Bau. Man wird nun damit anfangen, dieses System (3) aufzulösen, und hat man Werthe für v gefunden, die ihnen genügen, so werden diese in den Gleichungen (2) substituirt, die entsprechenden u liefern, und zwar, wie leicht zu sehen, für jedes Werthsystem von v, n Werthsysteme für u.

5.

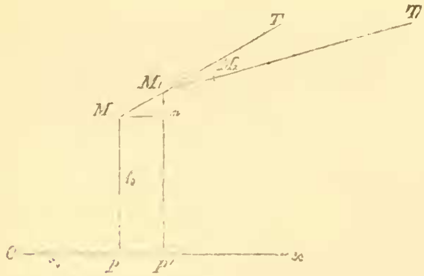
Sowie durch die Einführung des Imaginären die Construction der gewöhnlichen Gleichungen eine bedeutende Vervollständigung erhielt, so kann, wie ich hier zeigen werde, durch dasselbe Mittel auch die geometrische Construction der Differentialgleichungen vervollständigt werden.

Man hat sich bisher sehr wenig mit diesem Gegenstande beschäftigt; mit einigen Worten lässt sich das, was darüber gesagt, wiedergeben. Um eine Differentialgleichung, etwa

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = f(x\ ,\ y)$$

zu construiren, verfuhr man folgender Massen [1]: Man nahm irgend einen beliebigen Punkt M an, seine Cordinaten seien $x_0\ y_0$. Werden diese Werthe in die gegebene Differentialgleichung substituirt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = f(x_0\ ,\ y_0) = y_0'$$



und wenn man alsdann die Linie MT zieht, welche mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= f(x_0, y_0)$ ist, so ist diese gerade Linie MT eine Tangente der gesuchten Curve. Da nun eine Curve und ihre Tangente in der Nähe des Berührungspunktes nahe zusammenfallen, so kann man den auf der geraden Linie MT in einer sehr kleinen Entfernung von M liegenden Punkt M' als der Curve angehörig betrachten. Seine Coordinaten sind alsdann

$$x_1 = OP' = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = M'P' = y_0 + M'm = y_0 + \Delta x\ .\ tang\ M'Mm = y_0 + \Delta x\ .\ y_0'$$

---

[1]) Siehe Moigno, Vorlesungen über Integralrechnung.

und diese geben in (1) substituirt

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 = f(x_1, y_1) = y_1',$$

wodurch die Richtung der durch den Punkt M' gehenden Tangente $M'T'$ bestimmt ist, wählt man nun auf dieser Tangente sehr nahe an M' den Punkt M'', so sind dessen Coordinaten

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$y_2 = y_1 + \Delta x \cdot y_1'$$

und die Richtung der Tangente am Punkte M'' wird gegeben durch

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 = f(x_2, y_2) = y_2'$$

u. s. f. Auf diese Weise erhält man ein Vieleck, welches um so weniger von der durch das Integral der gegebenen Differentialgleichung bestimmten Curve verschieden ist, je grösser die Anzahl seiner Seiten wird.

So weit ging man bisher in der Construction der Differential-Gleichungen. Es giebt aber noch eine ganze Reihe anderer Curven, die auch derselben Differentialgleichung genügen, und nicht aus dieser Darstellungsweise hervorgehen. Es sind das dieselben Curven, die ich bei einer andern Gelegenheit mit dem Namen „conjugirte Curven" bezeichnete.

Sei

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(u\ ,\ z).$$

Ich gebe jetzt dem u nicht bloss reelle, sondern auch imaginäre Werthe $x + y\sqrt{-1}$, so dass man hat

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(x + y\sqrt{-1}, z),$$

welche für die speciellen reellen Werthe x_0 y_0 z_0 übergeht in

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 = f(x_0 + y_0\sqrt{-1}\ ,\ z_0) = P_0 + Q_0\sqrt{-1}$$

Lässt man nun x_0 um die sehr kleine Grösse Δx, y_0 um Δy, und z_0 um Δz wachsen, so hat man sehr nahe, wenn man die Coordinaten des nächsten Punktes mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet

(1) $$z_1 = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 (\Delta x + \Delta y\sqrt{-1})$$

oder

$$z_1 = z_0 + (P_0 + Q_0 \sqrt{-1})\,(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})$$

oder

$$(2) \quad z_1 - z_0 = \Delta z = (P_0 \Delta x - Q_0 \Delta y) + \sqrt{-1}\,(Q_0 \Delta x + P_0 \Delta y).$$

Wählt man Δy so, dass Δz reell wird, so muss man

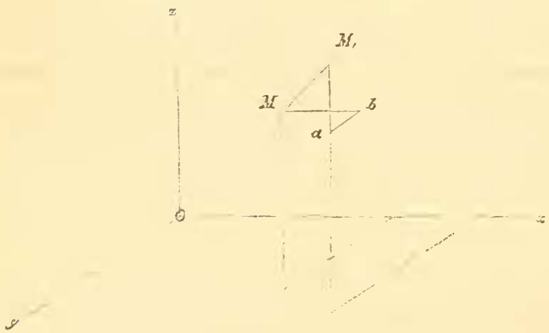
$$Q_0 \Delta x + P_0 \Delta y = 0$$

setzen, denn dadurch wird

$$\Delta z = P_0 \Delta x - Q_0 \Delta y$$

somit reell. Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$\Delta y = -\frac{Q_0}{P_0}\Delta x \quad , \quad \Delta z = \frac{P_0^2 + Q_0^2}{P_0}\Delta x$$



Habe nun M die Coordinaten x_0, y_0, z_0; M_1 d. Coordinaten x_1, y_1, z_1, so ist $Mb = \Delta x$; $ab = \Delta y$, $aM_1 = \Delta z$; nennt man $MM_1 = r$, so ist

$$\Delta x = r \cos \alpha$$
$$\Delta y = r \cos \beta$$
$$\Delta z = r \cos \gamma,$$

und diese Werthe in die beiden Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} Q_0 \Delta x + P_0 \Delta y &= 0, \\ P_0 \Delta c - Q_0 \Delta y &= \Delta z \end{aligned}$$

substituirt, geben für $\alpha\ \beta\ \gamma$ folgende Werthe

$$\cos^2\alpha = \frac{P_0^2}{(P_0^2 + Q_0^2)\,(1 + P_0^2 + Q_0^2)};\ \cos^2\beta = \frac{Q_0^2}{(P_0^2 + Q_0^2)\,(1 + P_0^2 + Q_0^2)};$$
$$\cos^2\gamma = \frac{P_0^2 + Q_0^2}{1 + P_0^2 + Q_0^2}$$

und diese geben die Richtung der Tangente zum Punkte M an.

Man wird daher, nachdem man den Punkt M angenommen hat, als Coordinaten des nächsten Punktes M_1 haben

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 - \frac{Q_0}{P_0}\Delta x$$
$$z_1 = z_0 + \frac{P_0^2 + Q_0^2}{P_0}\Delta x$$

und man findet durch Substitution dieser Werthe in die gegebene Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_1 = f\left(x_1 + y_1\sqrt{-1}\ ,\ z_1\right) = P_1 + Q_1\sqrt{-1}.$$

Zieht man von dem Punkte M_1, dessen Coordinaten x_1, y_1, z sind, eine Gerade unter den Winkeln $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ so, dass

$$\cos^2\alpha_1 = \frac{P_1^2}{(P_1^2 + Q_1^2)(1 + P_1^2 + Q_1^2)}\ ;\ \cos^2\beta_1 = \frac{P_1^2}{(P_1^2 + Q_1^2)(1 + P_1^2 + Q_1^2)}$$
$$\cos^2\gamma_1 = \frac{P_1^2 + Q_1^2}{1 + P_1^2 + Q_1^2}$$

ist, so ist diese Gerade eine Tangente zum Punkte M_1. Setzt man alsdann wieder

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$y_2 = y_1 - \frac{Q_1}{P_1}\Delta x$$
$$z_2 = z_1 + \frac{P_1^2 + Q_1^2}{P_1}\Delta x$$

so erhält man wieder einen nächsten Punkt u. s. f.

Es wäre hier am Orte, all diejenigen Fälle aufzuzählen, in denen die eben vorgetragene Constructions-Weise ihre Anwendbarkeit versagte. Allein, da diese Fälle dieselben sind, die in allen Theorien, wobei man die Differentialrechnung anwendet, vorkommen, so unterlasse ich dies, und will bloss einen einzigen Fall einer Betrachtung würdigen.

Wenn sich nämlich ereignet, dass für gewisse Werthe von x, y, z $P = 0$ und $Q = 0$ wird, alsdann erscheinen die y und z des nächsten Punktes, sowie auch die Cosinuse der Winkel α und β, welche die Richtung der Tangenten an x, y, z bestimmen, in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, während γ, 90° wird. In einem solchen

Falle hat die Curve, welche das Bild der vorgelegten Differential-Gleichung ist, im Allgemeinen einen höchsten oder tiefsten Punkt. Seien x_0, y_0, z_0 diese gewissen Werthe, so hat man statt der Gleichung (1) zu schreiben

$$(4) \qquad z_1 = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1}) + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)_0 (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^2$$

oder

$$\Delta z = (P_0 + Q_0 \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1}) + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2} (P_0' + Q_0' \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^2$$

wenn man die kleinen Grössen der höheren als zweiten Ordnung vernachlässigt. Nun ist aber

$$P_0 = 0 \quad , \quad Q_0 = 0 ,$$

somit

$$\Delta z = \frac{1}{1 \cdot 2} (P_0' + Q_0' \sqrt{-1}) (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^2$$

oder

$$\Delta z = \frac{1}{2} \left[P_0' (\overline{\Delta x}^2 - \overline{\Delta y}^2) - 2 Q_0' \Delta x \Delta y\right] + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \left[Q_0' (\overline{\Delta x}^2 - \overline{\Delta y}^2) + 2 P_0' \Delta x \Delta y\right]$$

und da dieses reell sein soll, so muss

$$(5) \qquad Q_0' (\overline{\Delta x}^2 - \overline{\Delta y}^2) + 2 P_0' \Delta x \Delta y = 0$$

sein; hieraus folgen, falls nicht P_0' und Q_0' zugleich Null sind, für Δy zwei verschiedene Werthe, bezeichnet man dieselben mit Δy_1 und Δy_2, so folgt aus (5)

$$(6) \qquad 1 + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = 0.$$

Da an den tiefsten und höchsten Punkten dem Δx zwei Werthe von Δy entsprechen, so werden von diesen Punkten zwei Curvenzweige auslaufen, welche zufolge der Gleichung (6) auf einander senkrecht stehen.

Sind aber nebstdem, dass $P_0=0$ und $Q_0=0$ ist, auch noch $P_0'=0$, $Q_0^1=0$, so hat man statt (4) zu schreiben

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1}) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)_0 (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1}) + \\ + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}\right)_0 (\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^3$$

oder

$$\Delta z = (P_0 + Q_0 \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1}) + \\ + \frac{1}{2}(P_0' + Q_0' \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^2 + \\ + \frac{1}{6}(P_0'' + Q_0'' \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^3$$

und da

$$P_0 = 0 \qquad Q_0 = 0$$
$$P_0' = 0 \qquad Q_0' = 0$$

ist, hat man

$$\Delta z = \frac{1}{6}(P_0'' + Q_0'' \sqrt{-1})(\Delta x + \Delta y \sqrt{-1})^3.$$

Setzt man der Kürze halber

$$\Delta x = r \cos \alpha \quad , \quad \Delta y = r \sin \alpha ,$$

so ist

$$\Delta z = \frac{r^3}{6}(P_0'' + Q_0'' \sqrt{-1})(\cos 3\alpha + \sqrt{-1} \sin 3\alpha) ,$$

oder

$$\Delta z = \frac{r^3}{6}(P_0'' \cos 3\alpha - Q_0'' \sin 3\alpha) + \\ + \frac{r^3}{6}(P_0'' \sin 3\alpha + Q_0'' \cos 3\alpha)$$

und dies wird reell, wenn

$$P_0'' \sin 3\alpha + Q_0'' \cos 3\alpha = 0 ,$$

wird; hieraus folgt

$$\tan g\, 3\alpha = -\frac{Q_0''}{P_0''}$$

woraus für α drei Werthe folgen, die construirt zu drei Richtungen führen, die unter gleichen Winkeln gegen einander geneigt sind. Eben so würde, wenn noch nebstdem

$$P_0'' = 0 \quad , \quad Q_0'' = 0$$

wäre

$$\Delta z = \frac{r^4}{24}\,(P_0''' \cos 4\alpha - Q_0''' \sin 4\alpha) + $$
$$+ \frac{r^4}{24}\sqrt{-1}\,(P_0''' \sin 4\alpha + Q_0''' \cos 3\alpha)$$

sein, dies führt auf

$$tang\ 4\alpha = -\frac{Q_0'''}{P_0'''}$$

und dies, wenn Q_0''' und P_0''' von Null verschieden sind, auf vier sich unter gleichen Winkeln schneidenden Curvenzweigen u. s. f.

Einer Erwähnung verdient wohl der Fall, wo alle P und Q der Nulle gleich werden. Dahin gehören die Gleichungen der Form

$$7) \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \varphi(z) \cdot f(u, z).$$

Setzt man hier für z eine solche Zahl, dass $\varphi(z)$ gleich Null wird, etwa $z = \alpha$, so macht diese Substitution nicht nur $\frac{\partial z}{\partial u}$, sondern auch $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial u^4}$ . . ., überhaupt alle Differentialquotienten gleich Null, denn es ist für $z = \alpha$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \varphi(\alpha) \cdot f(u, \alpha) = 0,$$

weil $\varphi(\alpha) = 0$ ist; ferner hat man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial}{\partial u}[f(u, z)] + f(u, z)\,\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Das erste Glied hievon ist Null, wegen $\varphi(z)$, das zweite wegen $\frac{\partial z}{\partial u}$, also ist $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$.

Ein nochmaliges Differenziren gibt

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2}[f(u, z)] + \frac{\partial}{\partial u}[f(u, z)]\,\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial u} +$$
$$+ f(u, z)\,\varphi'(z) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}[f(u, z)\,\varphi'(z)]$$

und hier hat wieder jedes Glied einen Factor Null, es sind diese nämlich der Ordnung nach

$$\varphi(z) \qquad \frac{\partial z}{\partial u} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial u}$$

im ersten, zweiten, dritten und vierten Gliede.

So fortfahrend, kann man sich leicht überzeugen, dass jeder Differenzialquotient gleich Null wird. — Man sieht, dass der Gleichung(7) $z=\alpha$ genügt, den aus $z=\alpha$ folgt, $\frac{dz}{du}=0$, und diese beiden Zahlen substituirt, machen (7) identisch. Es ist somit $z=\alpha$ ein singuläres Integral, falls es nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung der Constanten hervorgeht.

Herr Rudolph Skuherský hielt nachstehenden Vortrag: „Die Theorie der Theilungspunkte als Beitrag zur Lehre von der freien Perspective." (Taf. XXII.)

Wenn auf eine beliebig im Raume gedachte Gerade A bestimmte Maasse aufgetragen werden sollen, oder wenn ein bestimmtes Maass dieser Geraden in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, so kann dieses, wie bekannt, auf folgende Art ausgeführt werden: Man ziehe irgend eine Gerade B, welche mit A in einer und derselben Ebene liegt, trage die gegebenen Maasse auf dieselbe auf, und führe durch die so erhaltenen Trennungspunkte parallele Linien, welche die Gerade A schneiden.

Haben diese parallelen Linien eine solche Richtung, dass die inneren und äusseren Winkel, welche dieselben mit der Geraden A und B einschliessen, einander gleich sind, so werden durch sie auf der Geraden A dieselben Maasse bestimmt, welche auf die Gerade B aufgetragen wurden.

Von diesem Satze wird dort eine nützliche Anwendung gemacht, wo es sich darum handelt, auf dem perspectivischen Bilde einer Geraden A bestimmte Maasse (perspectivisch) aufzutragen; dabei ist es von Vortheil, die bezeichnete Gerade B mit Rücksicht auf die eben angegebene Beschränkung in der Bildfläche zu wählen.

Da bei diesem Umstande die Trennungspunkte der auf B aufgetragenen Maasse schon die Durchschnitte der gedachten Theilungslinien mit der Bildfläche sind, so wird es sich nur um deren Verschwindungspunkt handeln, um die perspectivischen Bilder derselben zeichnen zu können.

Die perspectivischen Bilder der Theilungslinien werden das perspectivische Bild der Geraden A in Punkten schneiden, durch